

线性代数是什么？

曹军
理学院数学系

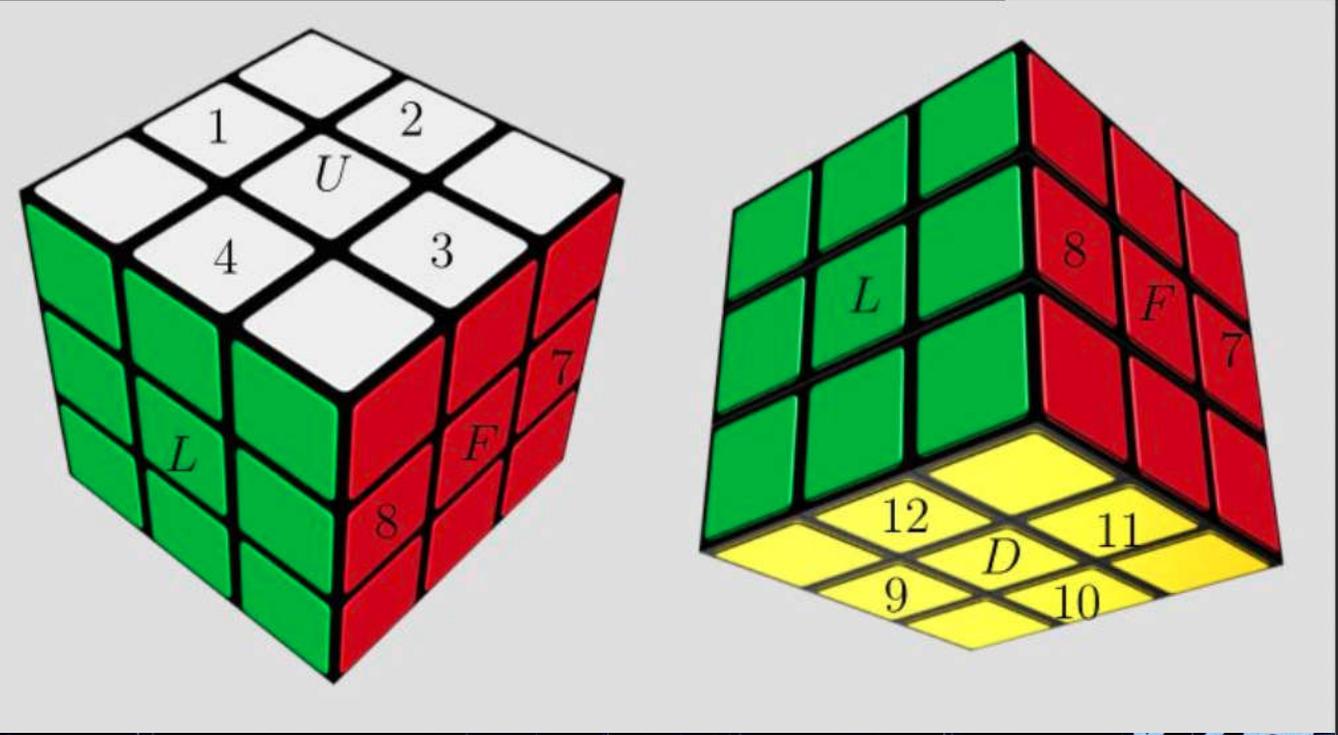
- 线性代数是一门**研究空间及其(线性)运动的学科**。



- 瑞典著名数学家Lars Gårding曾说：“如果不熟悉线性代数的概念，要去学习自然科学，现在看起来就和文盲差不多”。
- 不懂**线性代数**在工科基本上算半个文盲，如果连**微积分**也不懂，就是一整个文盲。

ALPHAGO

Tribeca Film Festival 2017
BFI London Film Festival Official Selection 2017
Winner Traverse City Film Festival 2017
Official Selection Mill Valley Film Festival 2017
Official Selection Warsaw Film Festival
VIFF Official Selection 2017



鸡兔同笼

孙子算经

zhi
今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？

雉：鸡

几何：几只



笼子里有若干只鸡和兔，从上面数，有35个头，从下面数，有94只脚。鸡和兔各有几只？

鸡兔同笼---线性方程组

设鸡的个数为 x , 兔子的个数为 y , 则 x, y 满足如下线性方程组。

$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 2x + 4y = 94 \end{cases}$$



矩阵



克莱默

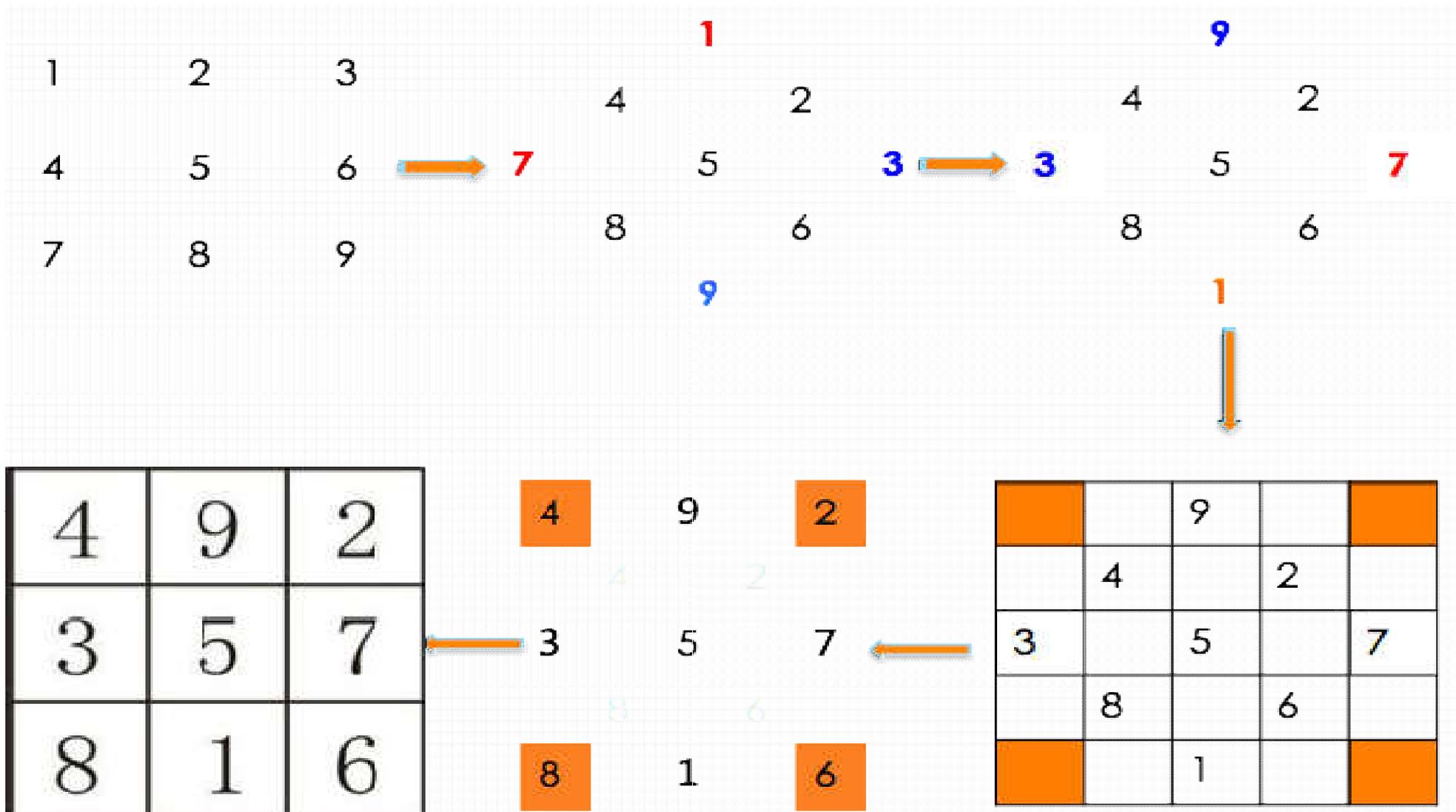


雅可比



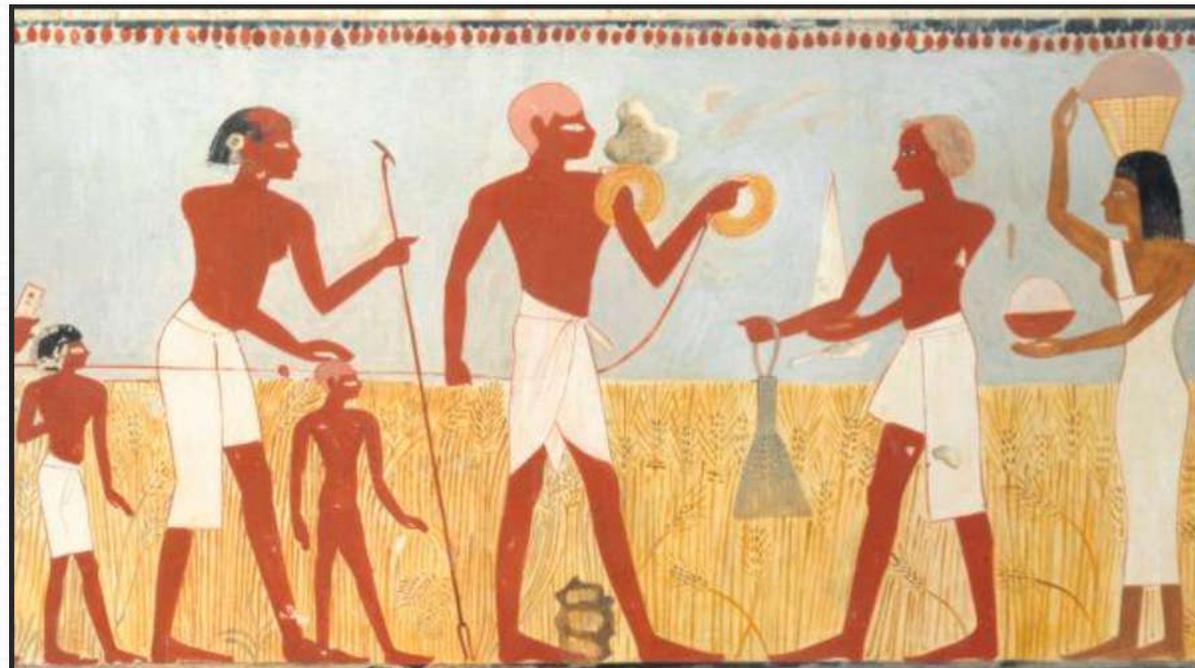
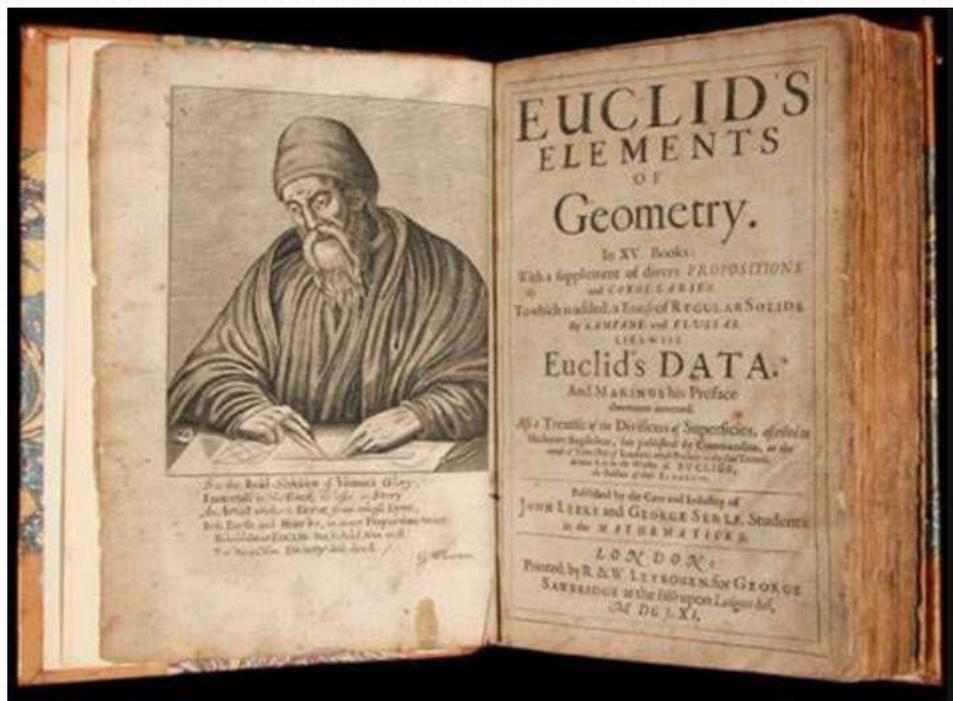
克罗列克

杨辉幻方



发展历史

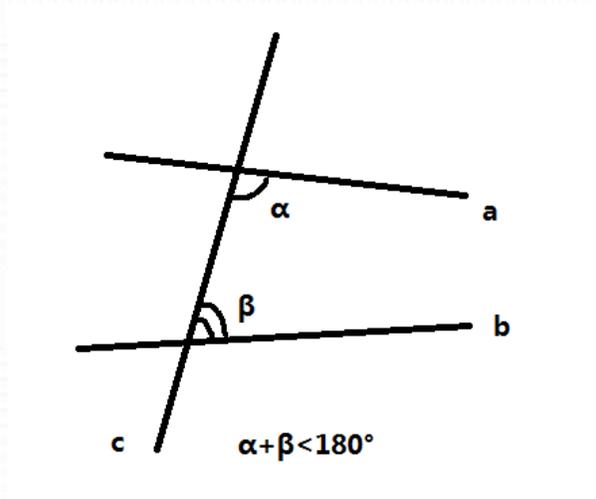
- 几何原本



平面几何是绳子测量形成的数学模型

平行公设

- 直线a、b被直线c所截，在截线一侧的；两个同侧内角 $\angle a + \angle b < 180^\circ$ ，那么直线a、b在向右无限延长一定会相交。



- 过已知直线外的一个已知点只能作一条直线和已知直线平行。
- “**平行线理论**”

非欧几何



罗巴切夫斯基



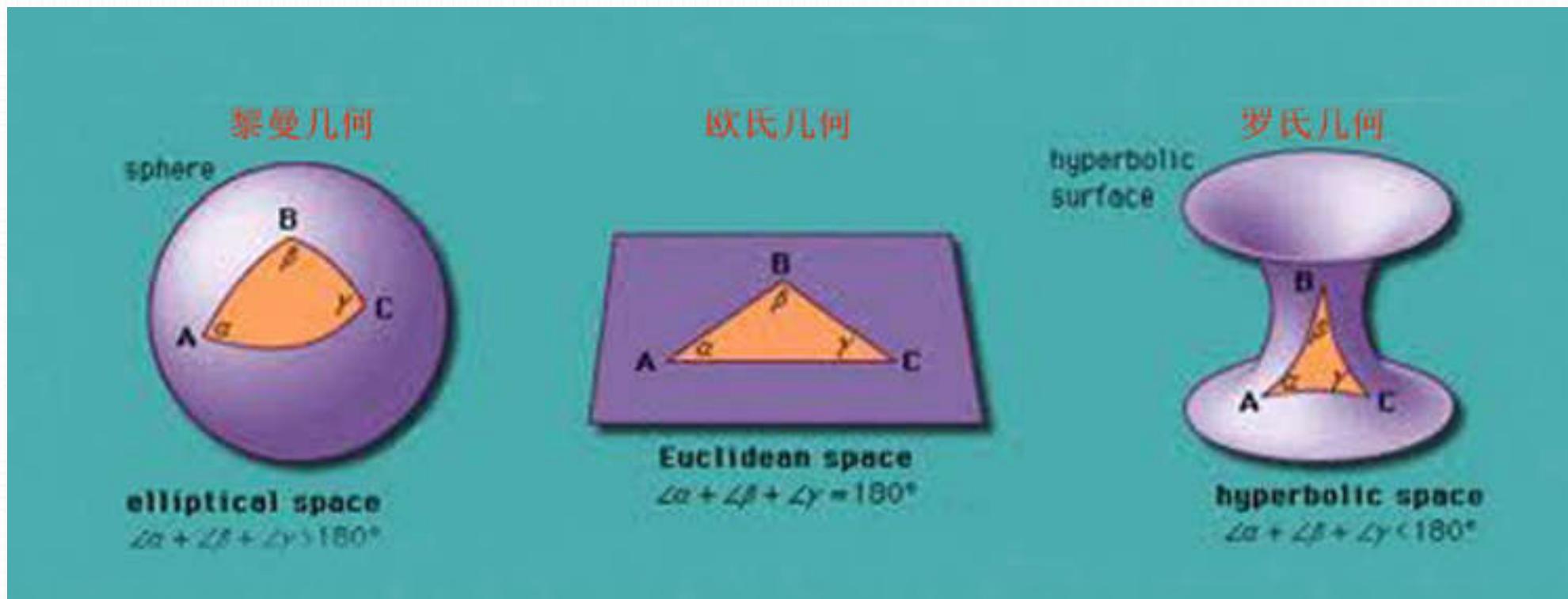
高斯



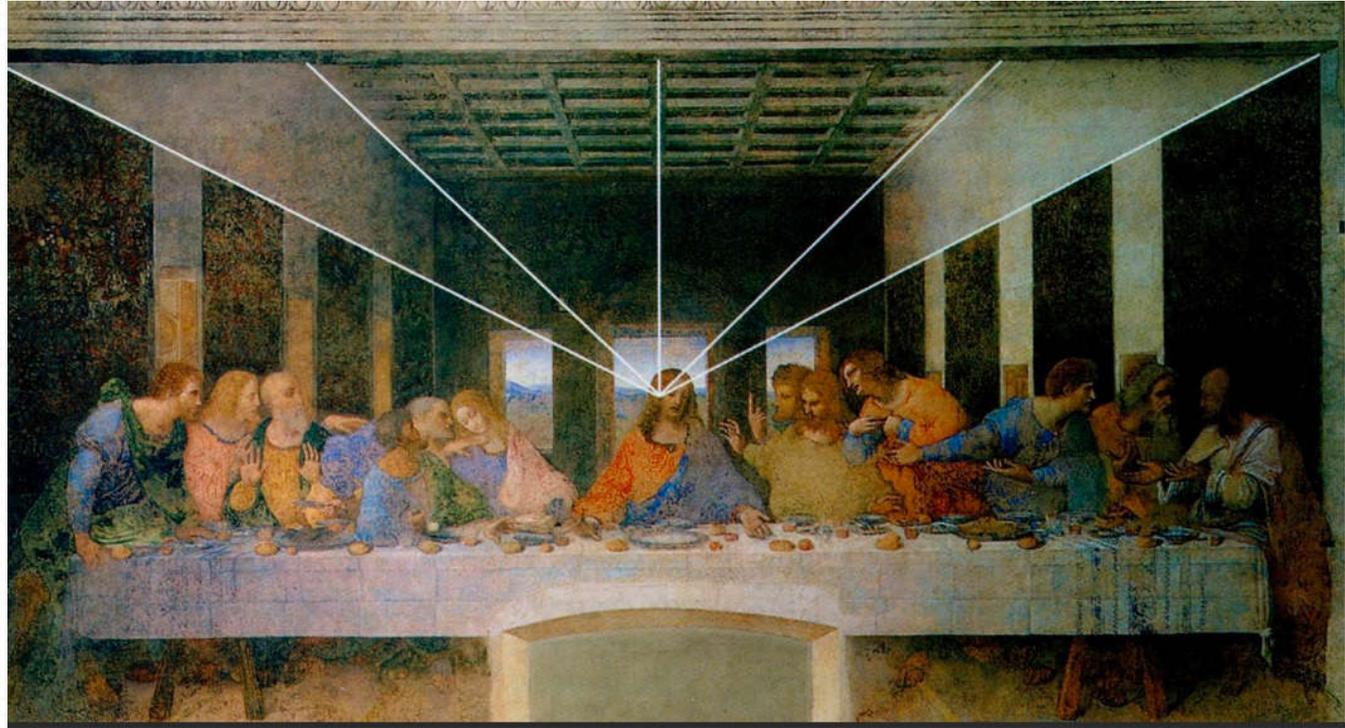
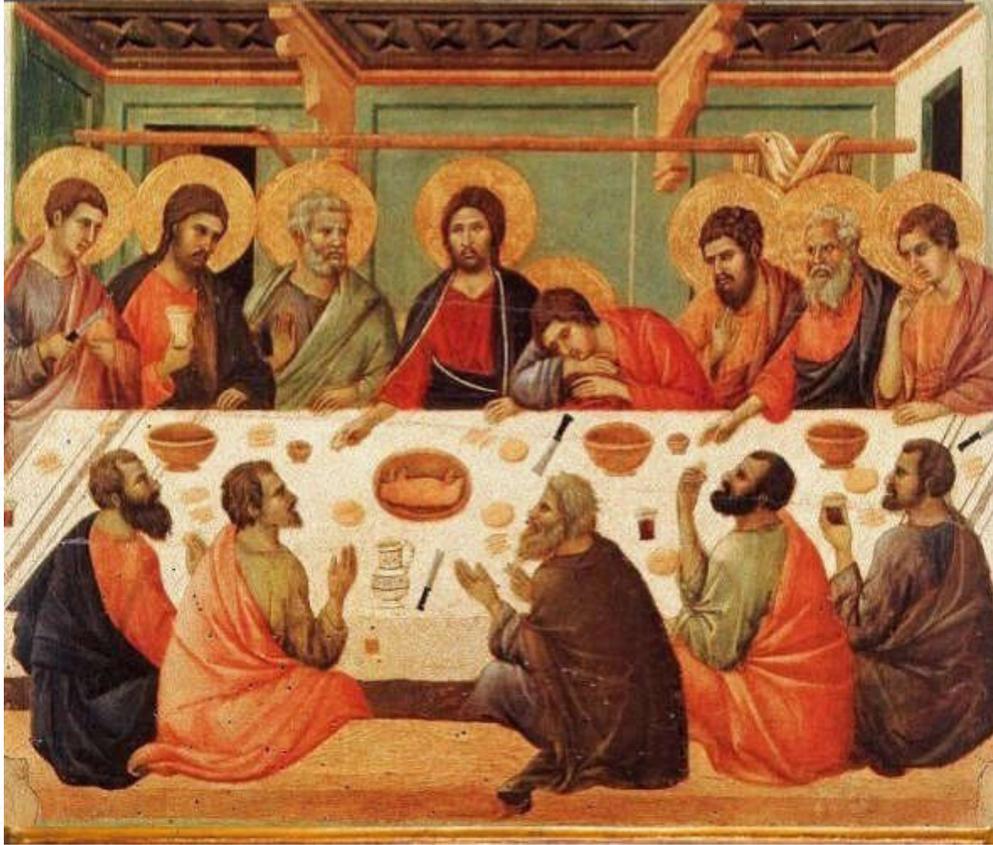
黎曼

- **欧氏几何**：过已知直线外的一个已知点只能作**一条**直线和已知直线平行。
- **罗氏几何**：过已知直线外的一个已知点能作**至少两条**直线和已知直线平行。
- **黎曼几何**：过已知直线外的一个已知点**不能**作直线和已知直线平行。

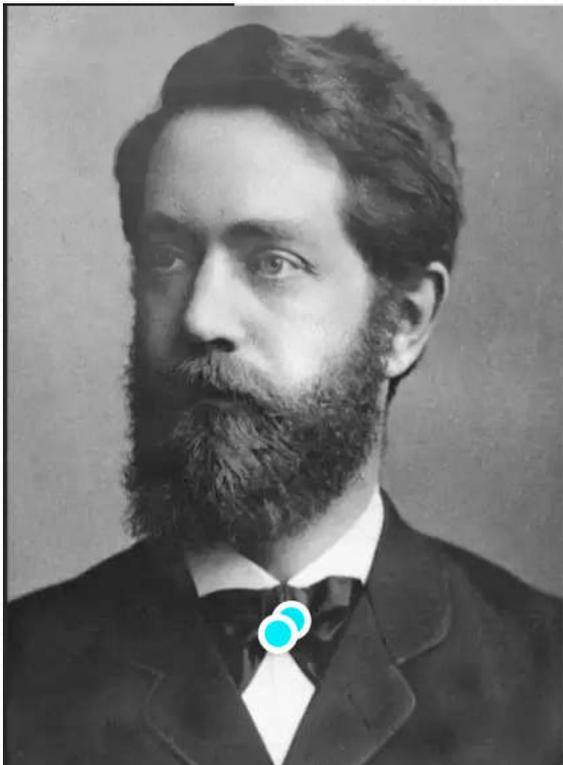
非欧几何



射影几何



希尔伯特与克莱因



克莱因



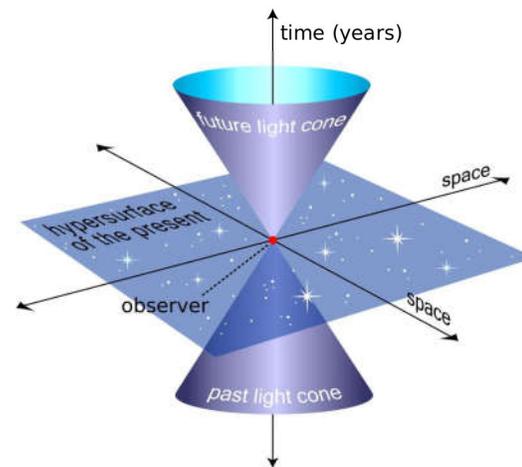
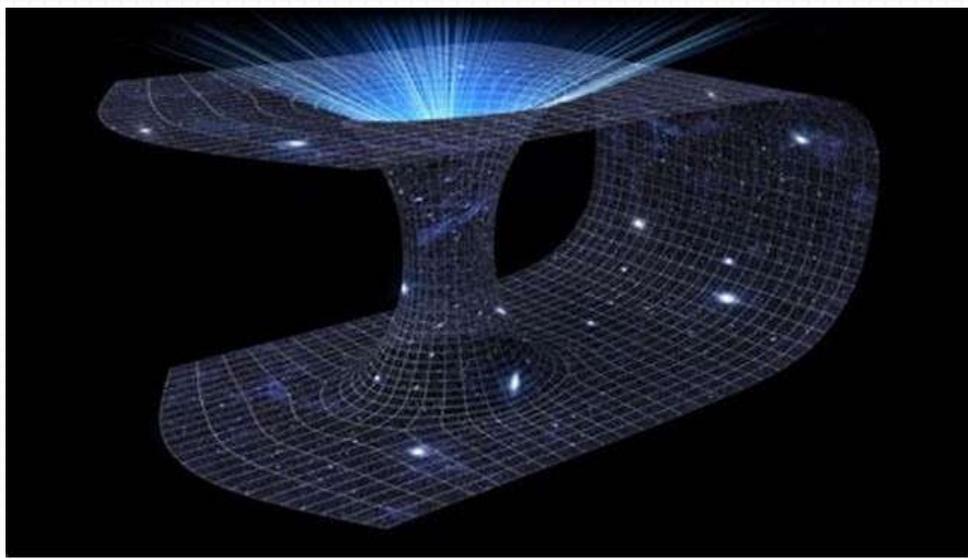
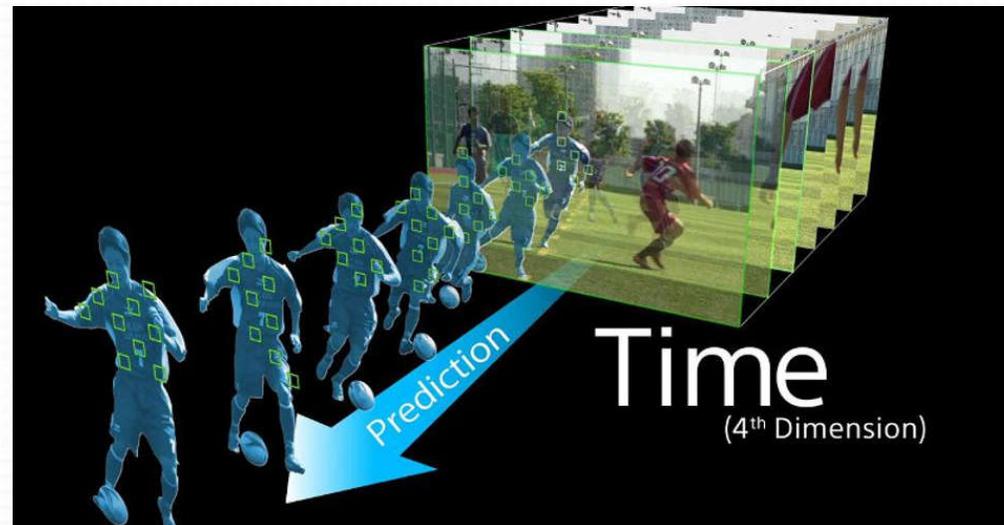
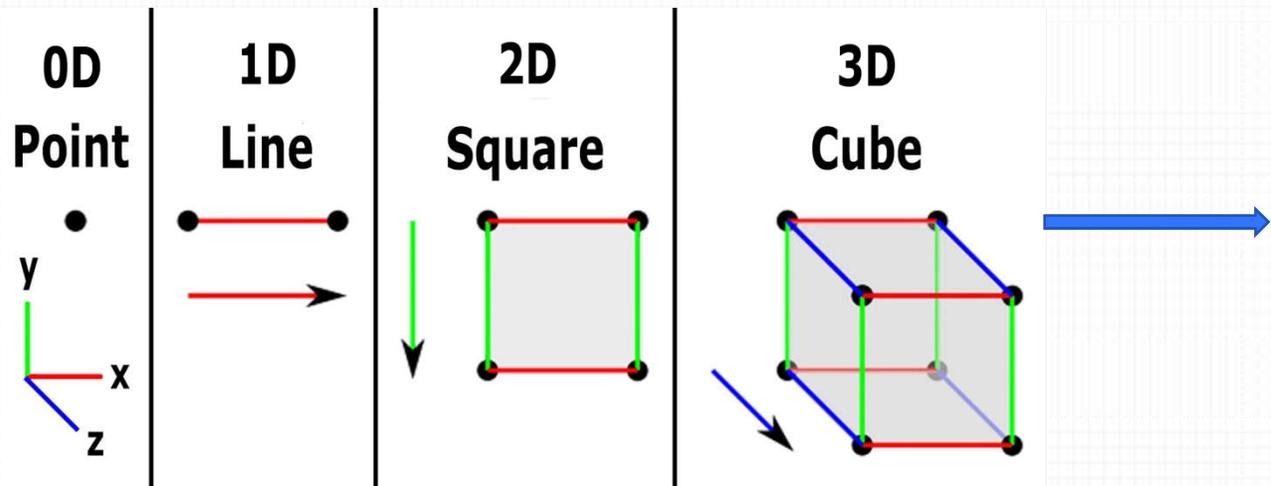
希尔伯特

克莱因：每一种**几何学**都有对应一个双射群，这一群对应于欧氏空间中的**变换(运动)**。

希尔伯特：欧氏空间中的点，线，面，叫做凳子、桌子、啤酒杯也可以。

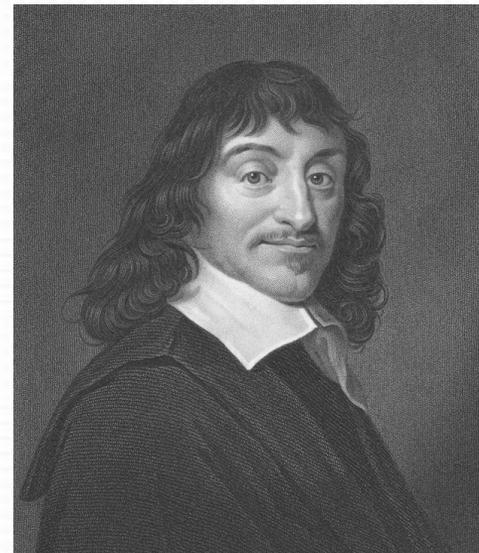
什么是空间？

- 线性代数是一门**研究空间及其(线性)运动的学科**。

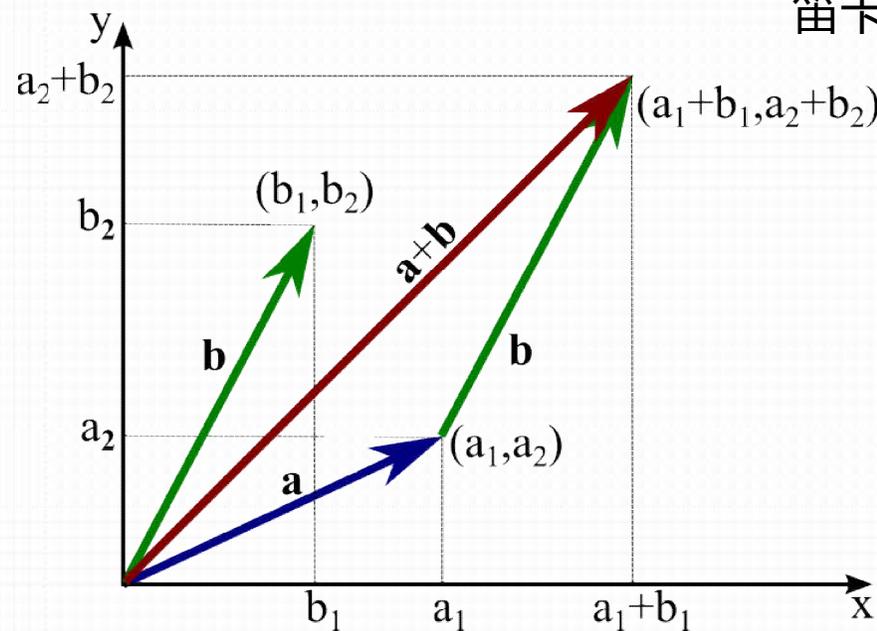
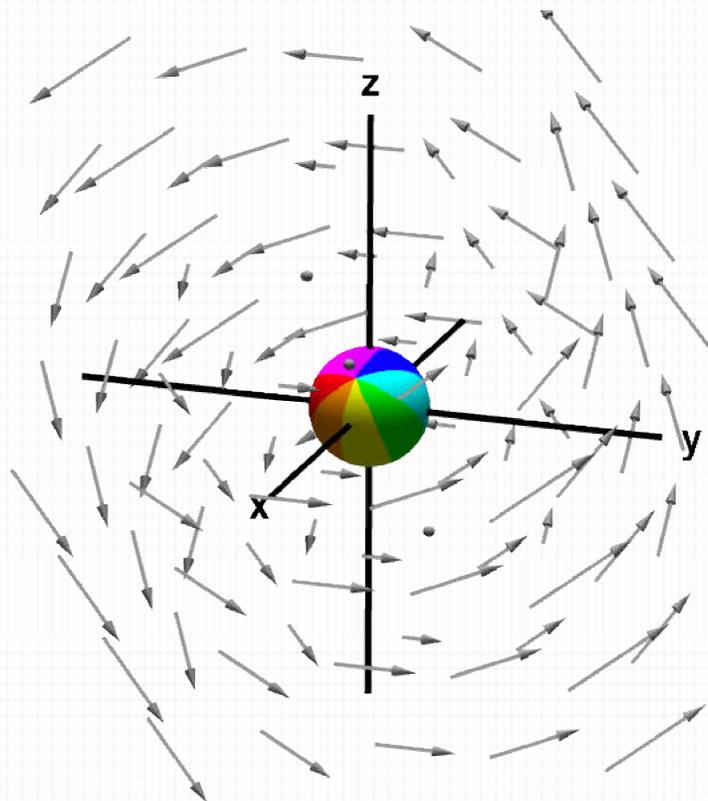


线性代数的研究对象

- 空间是一些对象的集合，这些对象可以由**抽象的点**构成。
- 空间最大的特征是可以**容纳运动**。
- 在线性代数中，这些抽象的点一般而言，就是**向量**。

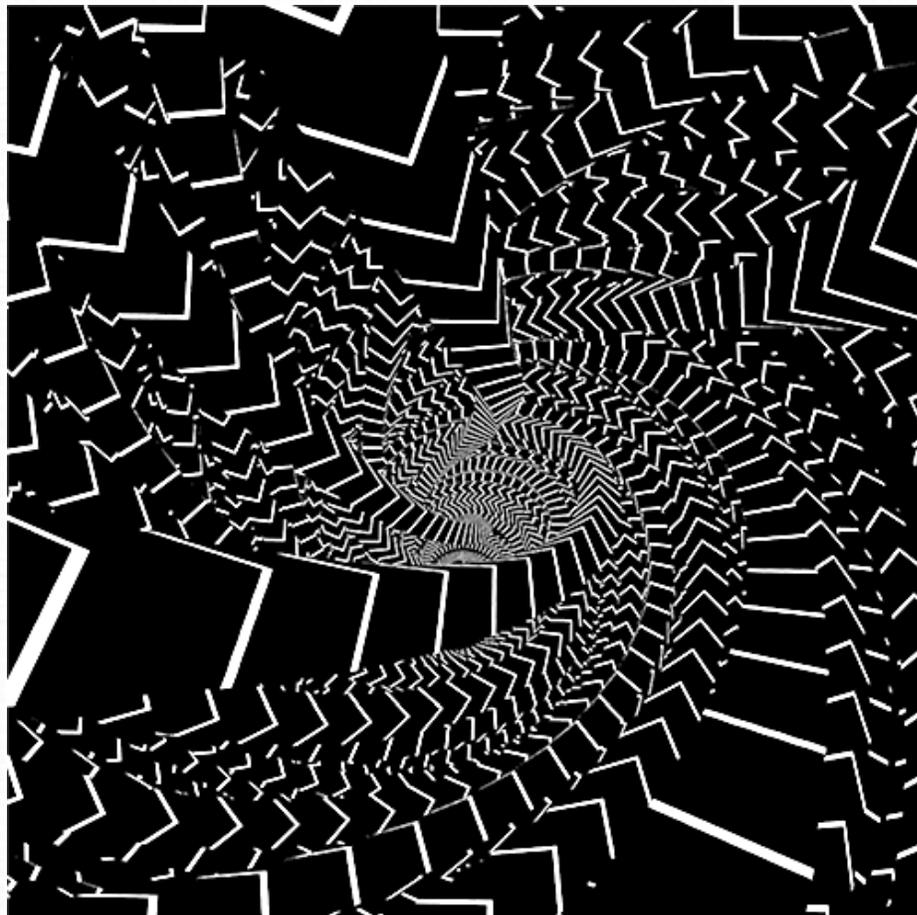


笛卡尔

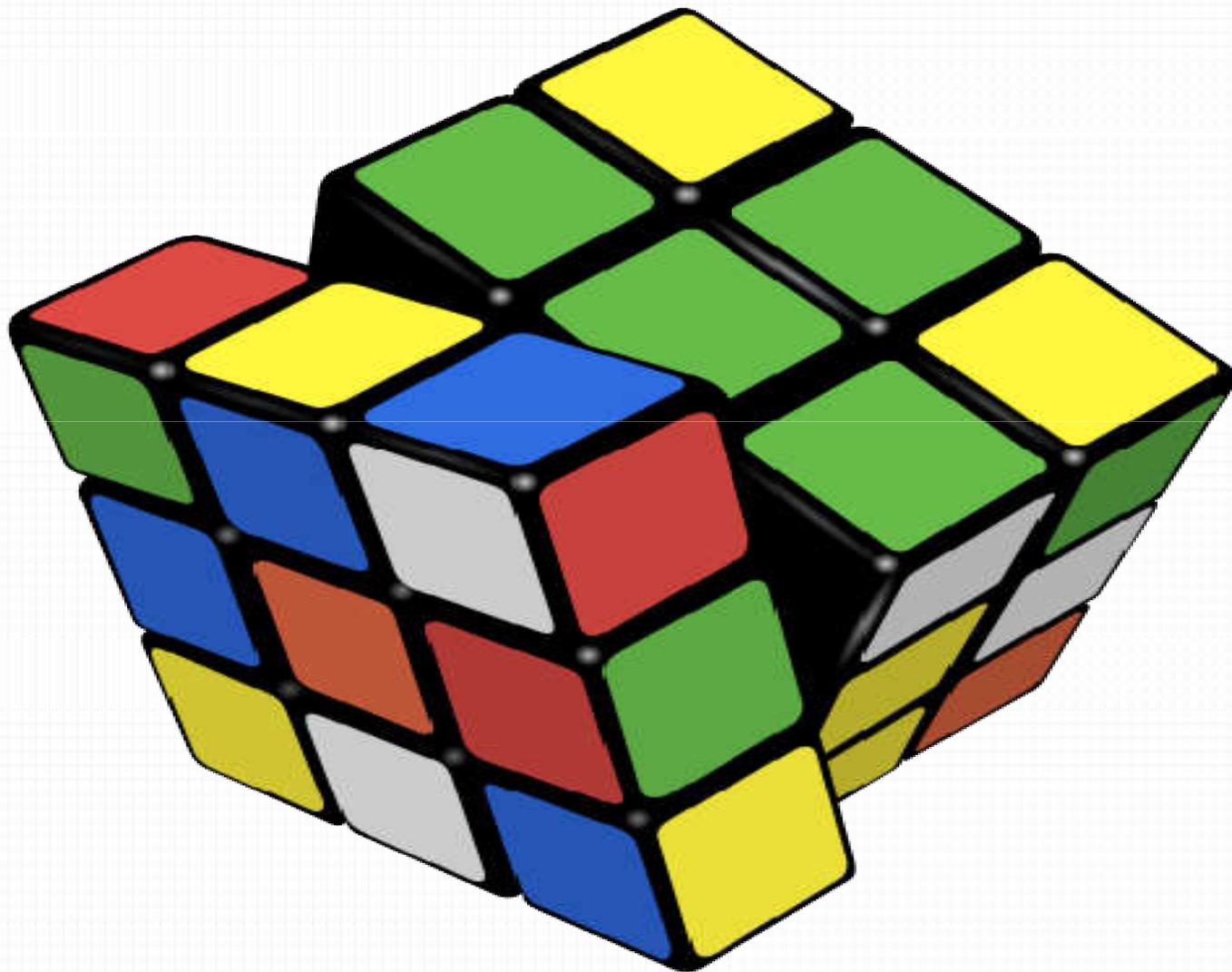


线性代数的研究对象

- 空间是一些对象的集合，这些对象可以由**抽象的点**构成。
- 空间最大的特征是可以**容纳运动**。
- 在线性代数中，这些抽象的点一般而言，就是**向量**。
- 在线性代数中，这些向量的运动一般而言，就是**矩阵**。
- **向量与矩阵构成线性代数的基本研究对象。**



魔方



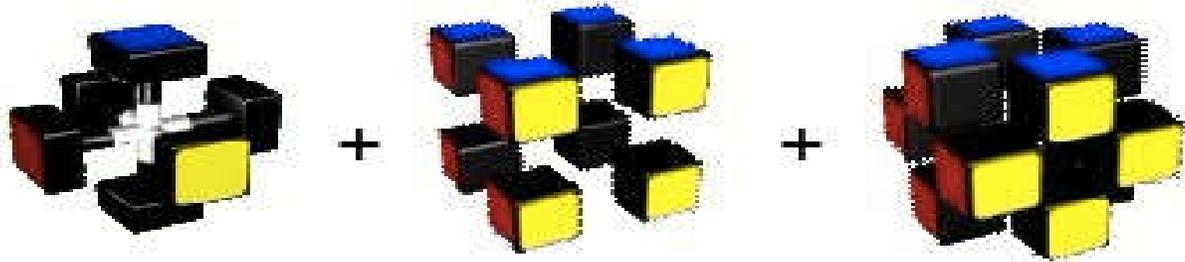
$$\frac{8! \times 3^8 \times 12! \times 2^{12}}{3 \times 2 \times 2} = 43,252,003,274,489,856,000$$

魔方可能的步数

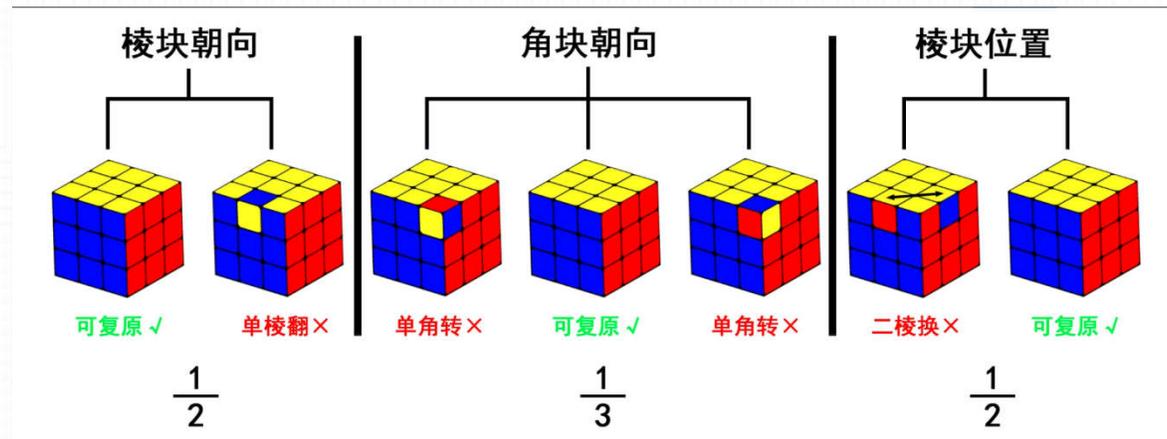
- 26个小块

- 8个角块 $8! \times 3^8$

- 12个边块 $12! \times 2^{12}$

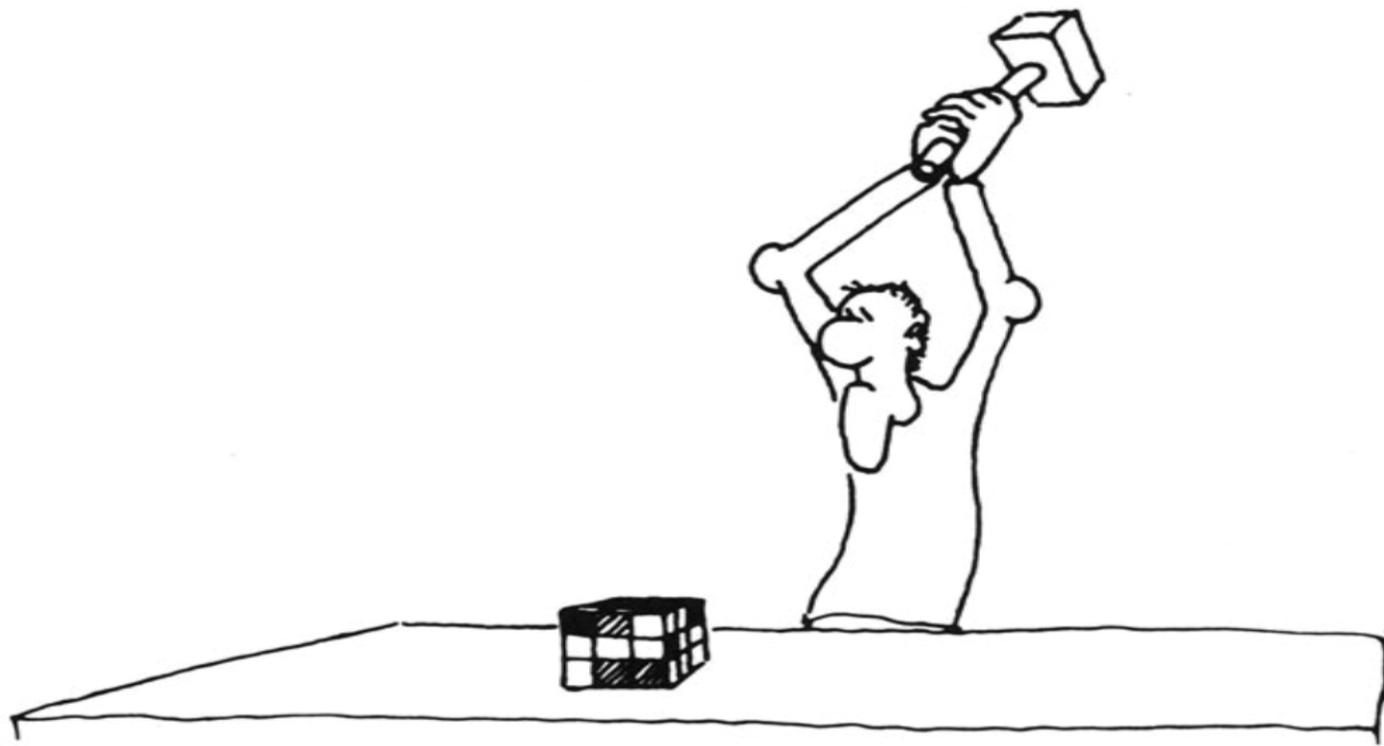


6个中心块 8个角块 12个棱块

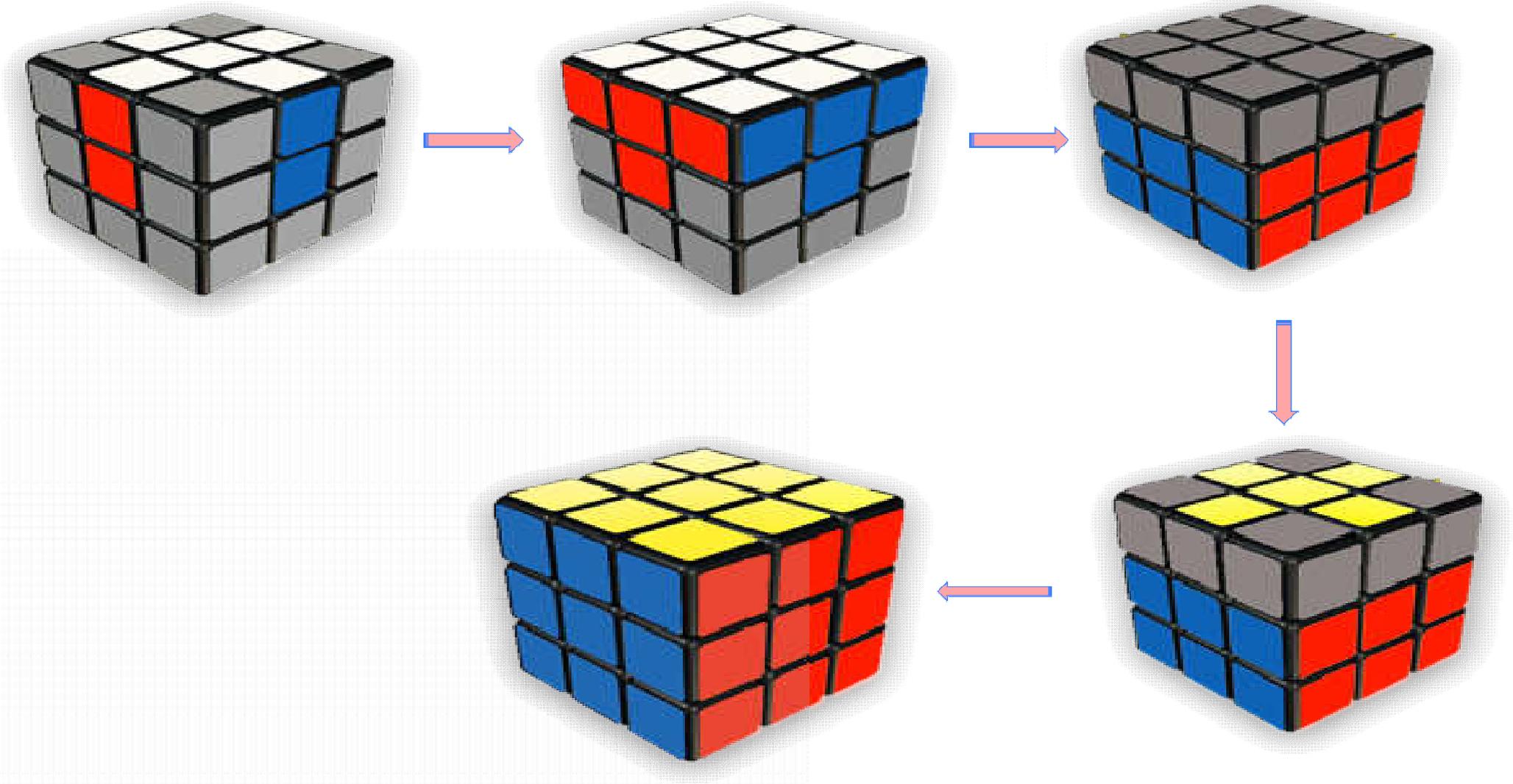


$$\frac{8! \times 3^8 \times 12! \times 2^{12}}{3 \times 2 \times 2} = 43,252,003,274,489,856,000$$

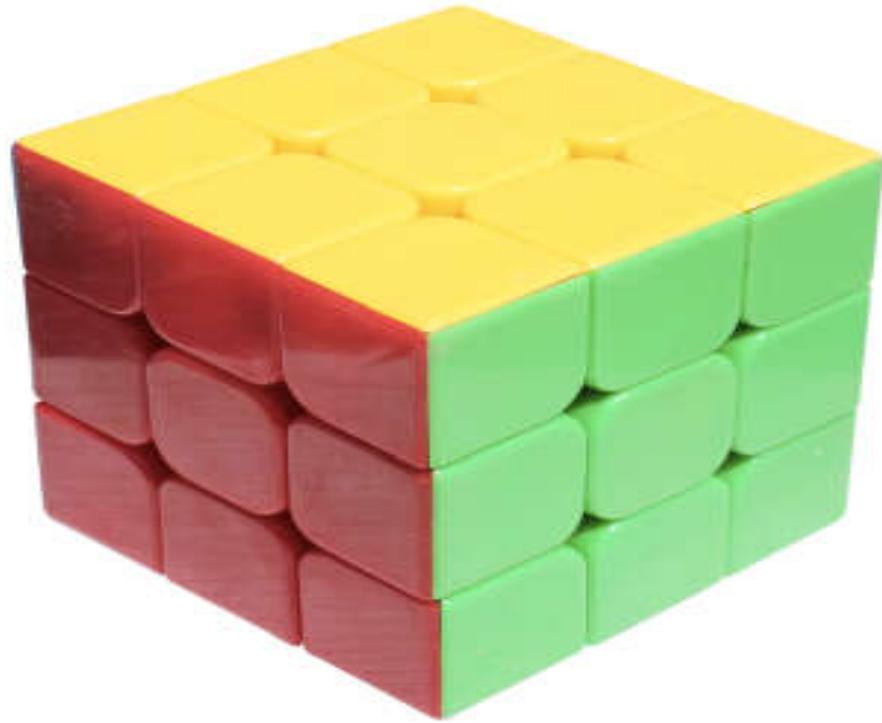
如何还原魔方？



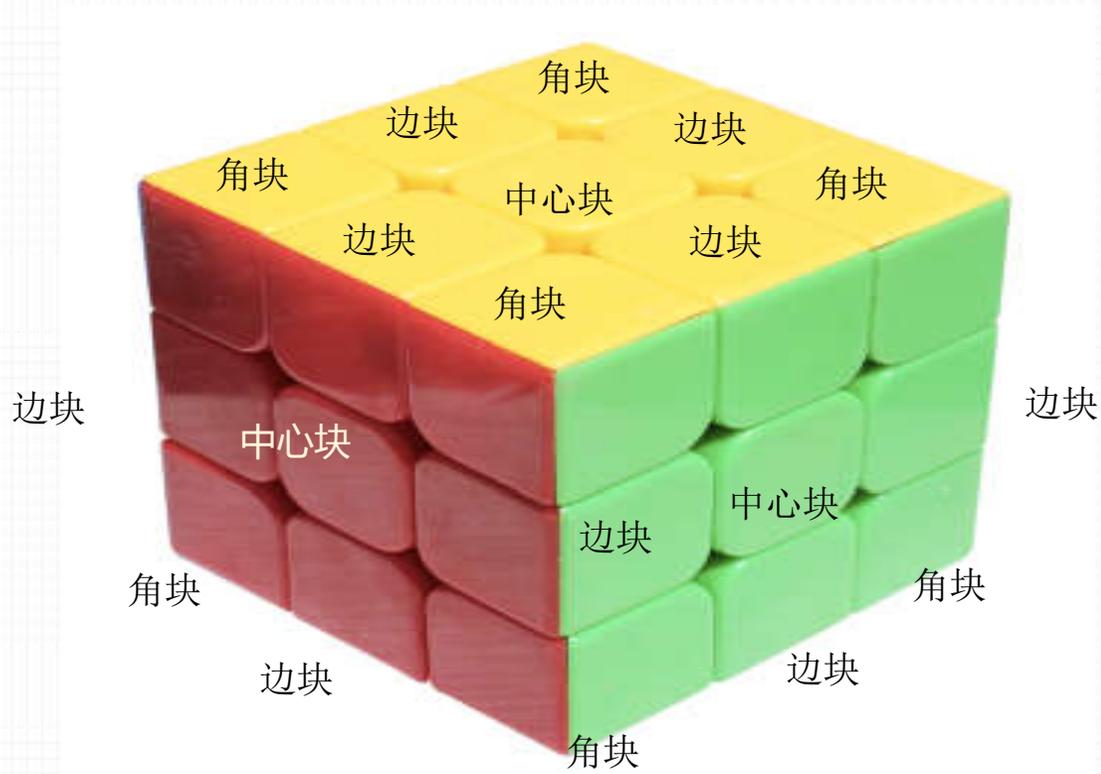
魔方还原公式



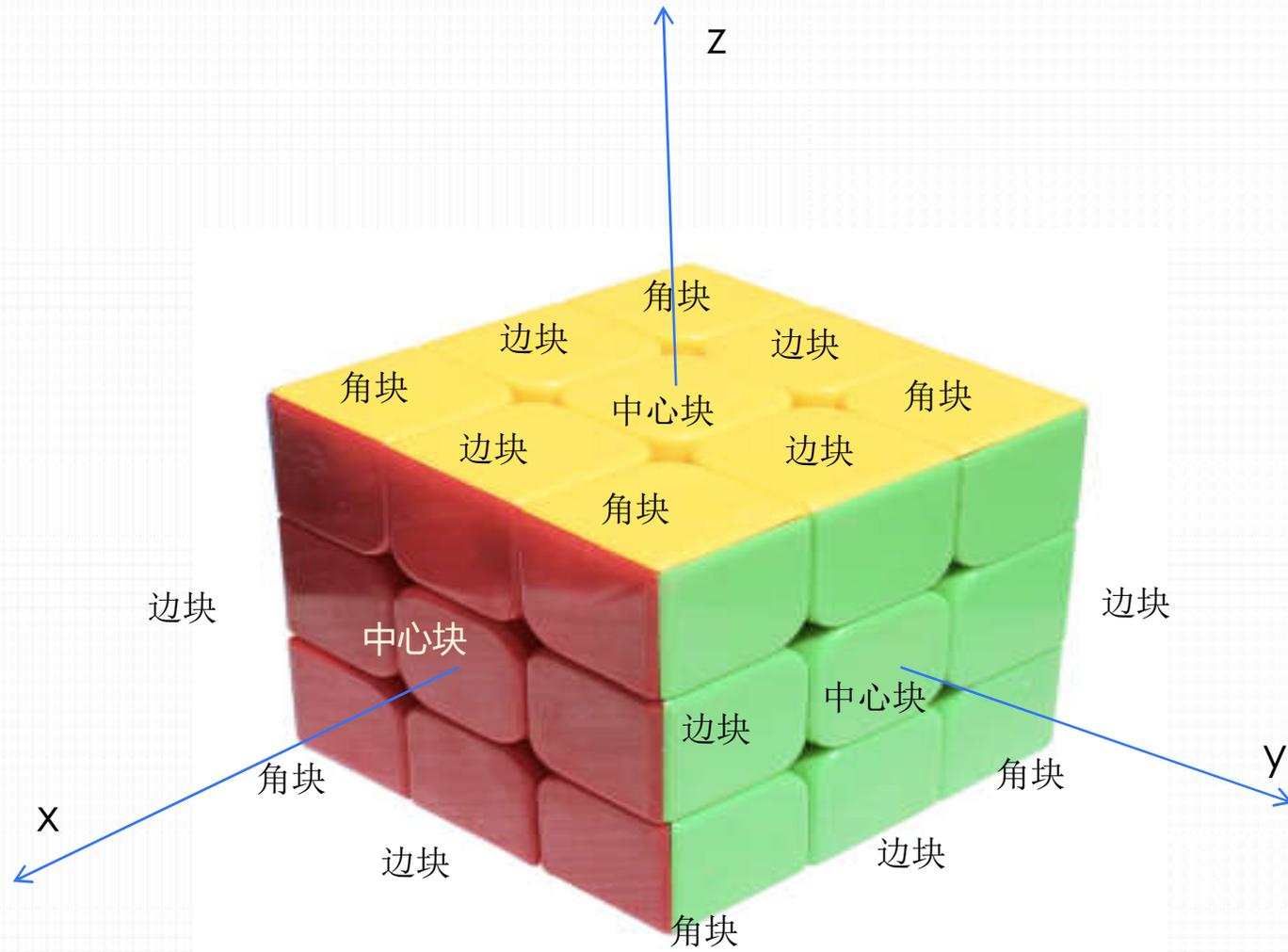
魔方坐标系



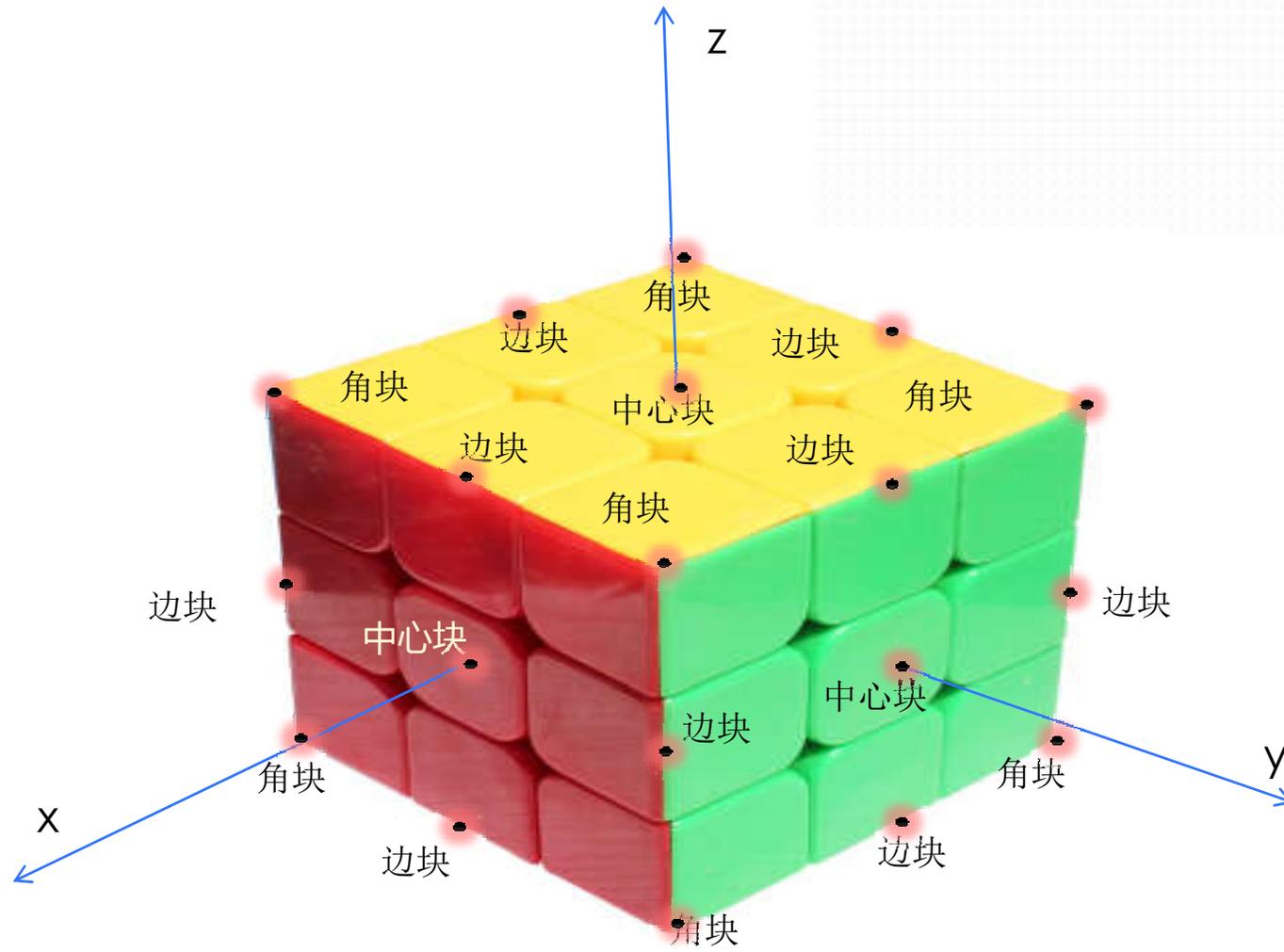
魔方坐标系



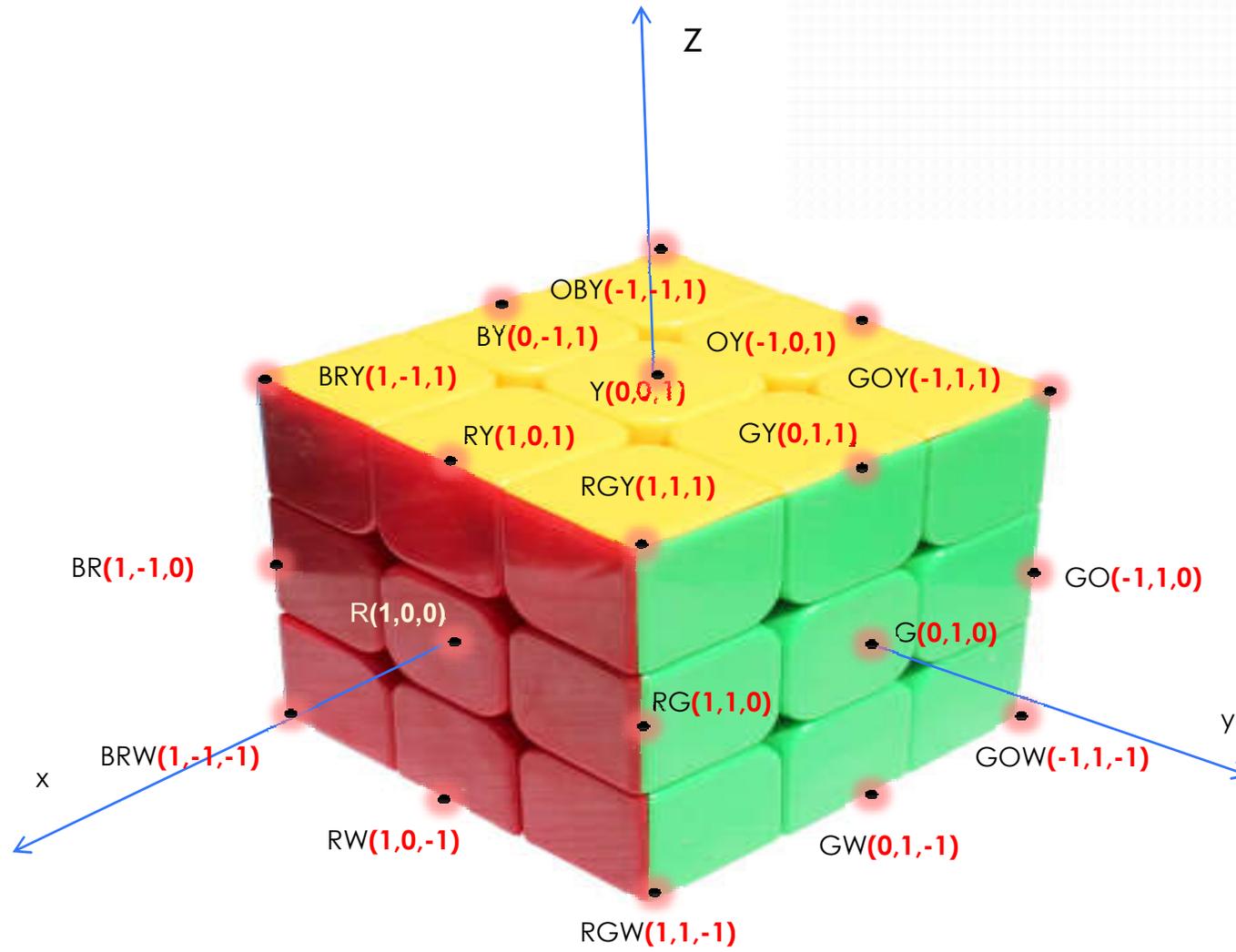
魔方坐标系



魔方坐标系



魔方块位坐标

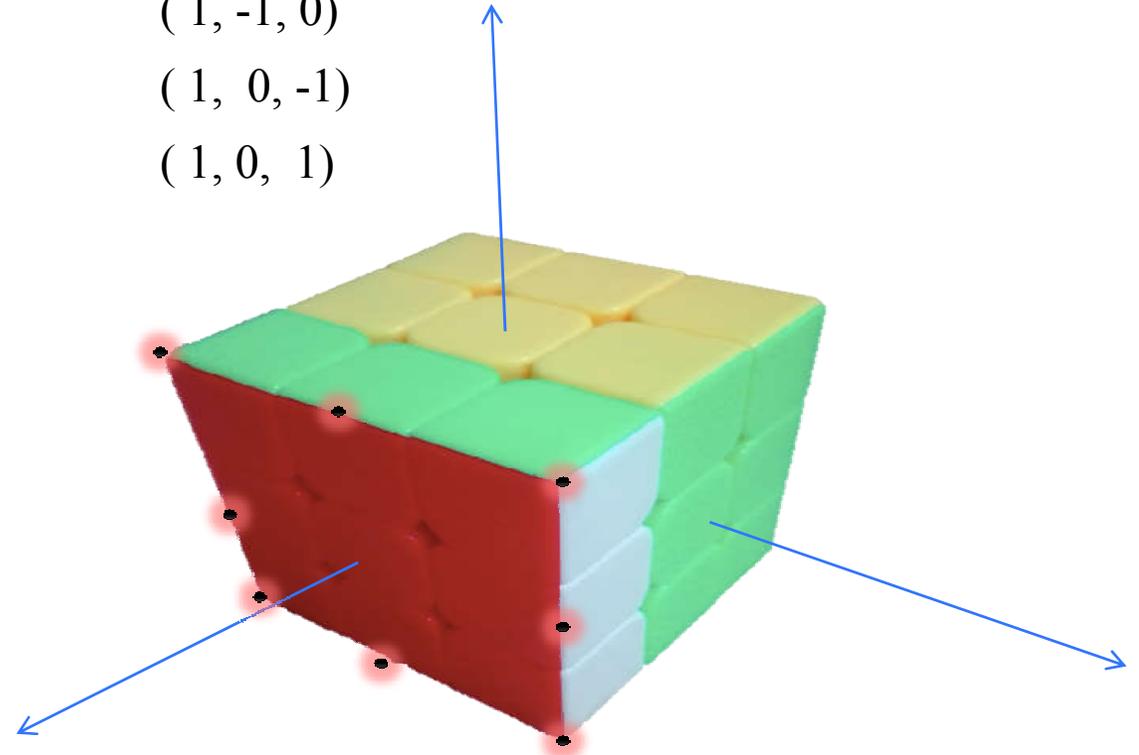
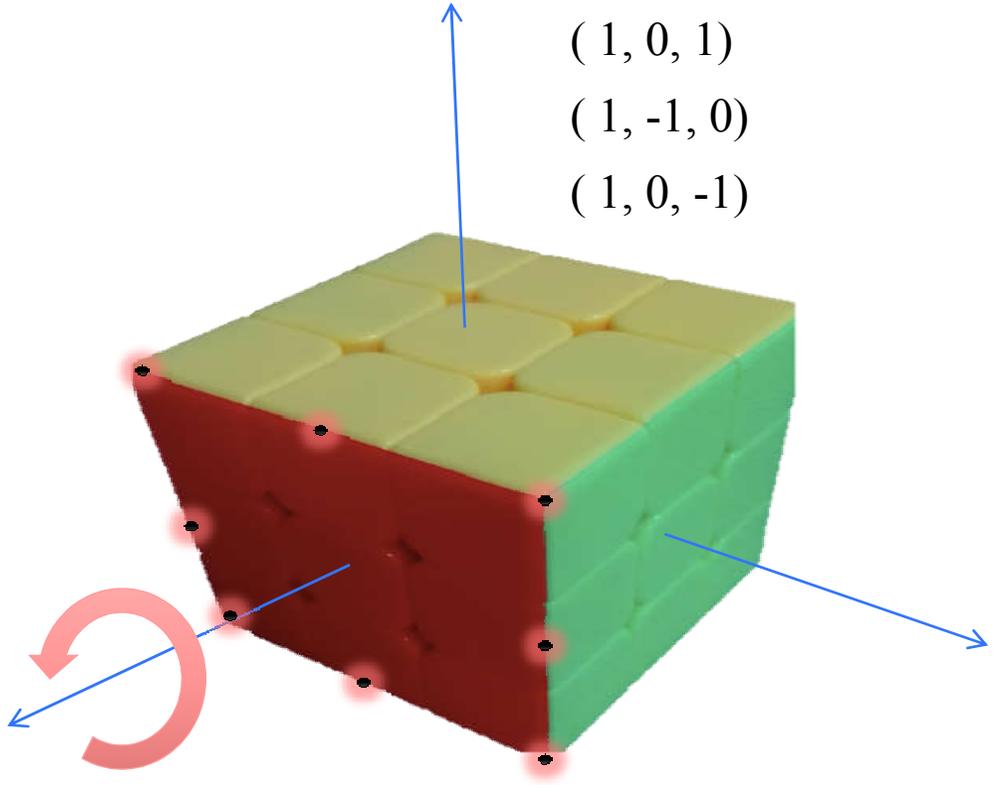


旋转变换

(1, 1, 1)
(1, -1, 1)
(1, -1, -1)
(1, 1, -1)
(1, 1, 0)
(1, 0, 1)
(1, -1, 0)
(1, 0, -1)



(1, -1, 1)
(1, -1, -1)
(1, 1, -1)
(1, 1, 1)
(1, 0, 1)
(1, -1, 0)
(1, 0, -1)
(1, 0, 1)



块位转动矩阵

$$\text{取 } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} h \\ l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h' \\ l' \\ m' \end{pmatrix}$$

$$T^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \dots \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



© Nem ASCOlar BUS

3.541

一个例子---数据科学

数据已经取代石油成为**当今世界最有价值的资源。**



数字经济NO.1！杭州问鼎世界数字经济之王！_城市
搜狐汽车



打造全国数字经济第一城，周江勇给出四个关键词--萧山网 中...
浙报网



打造全国数字经济第一城 周江勇给出四个关键词-浙...
浙商网 证券频道



杭州将打造全国数字经济第一城，你知道数字城市吗...
搜狐汽车



杭州如何打造全国数字经济第一城？市...
凤凰网



杭州打造“全国数字经济第一城” 凭的是什..._发...
搜狐汽车



马云：打造全国数字经济第一城 杭州潜力远没发挥出...
浙商网 证券频道

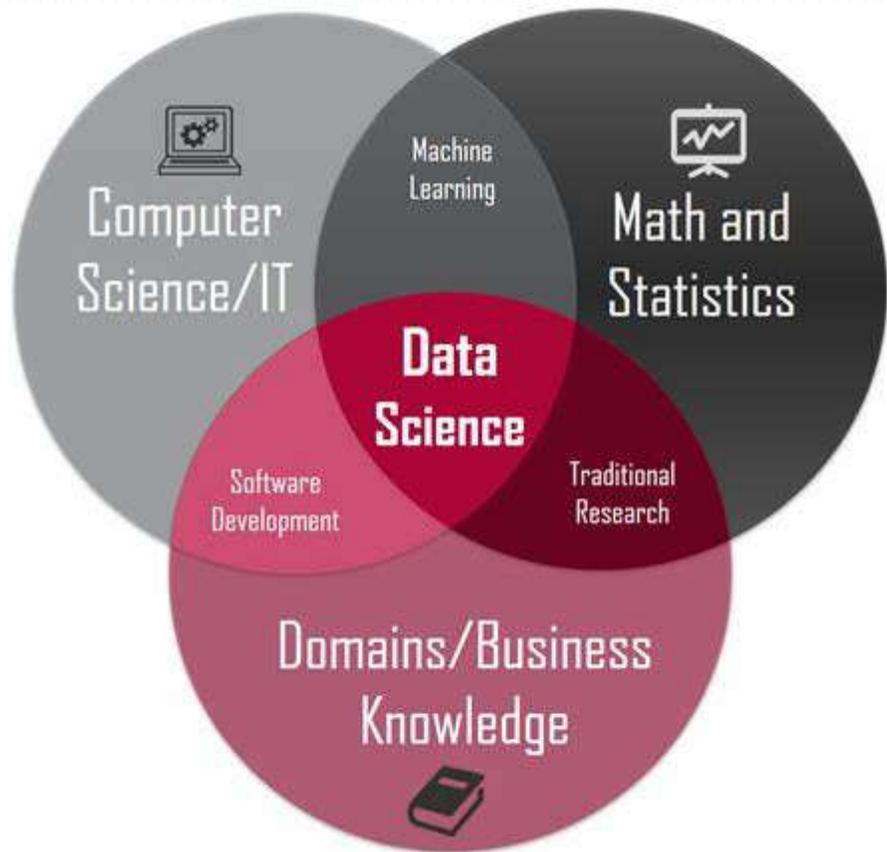


杭州打造全国数字经济第一城_城市频道...
新浪网



打造全国数字经济第一城 浙江杭州蓄势待发
千家网

什么是数据科学？



什么是数据科学？

表1 太阳系八大行星绕太阳运动的数据

行星	周期 (年)	平均距离	周期 ² /距离 ³
水星	0.241	0.39	0.98
金星	0.615	0.72	1.01
地球	1.00	1.00	1.00
火星	1.88	1.52	1.01
木星	11.8	5.20	0.99
土星	29.5	9.54	1.00
天王星	84.0	19.18	1.00
海王星	165	30.06	1.00



第谷

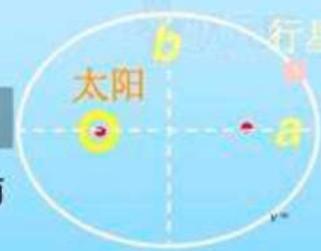


开普勒

开普勒三定律

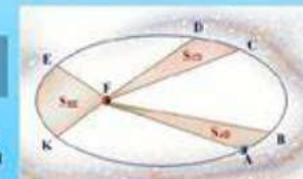
开普勒第一定律——轨道定律

所有行星绕太阳运动的轨道都是椭圆，太阳处在椭圆的一个焦点上。



开普勒第二定律——面积定律

对每个行星来说，它与太阳的连线在相等的时间扫过相等的面积；

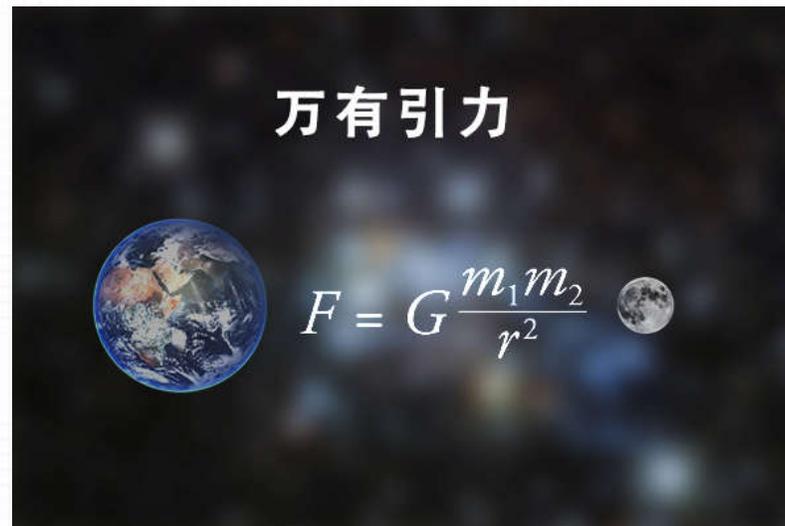
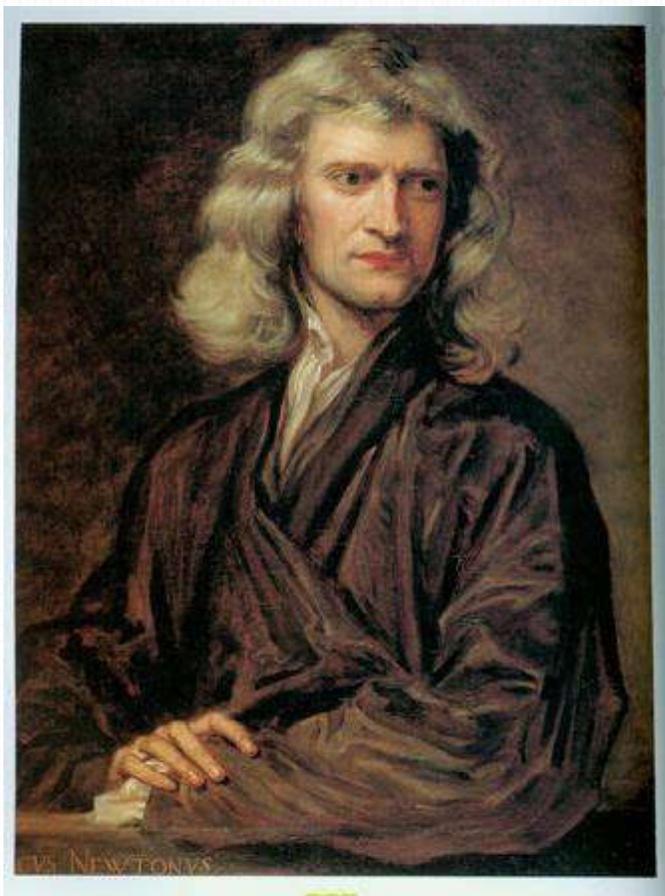


开普勒第三定律——周期定律

所有行星的轨道的半长轴的三次方跟公转周期的二次方的比值都相等。

$$k = \frac{a^3}{T^2}$$

牛顿模式 VS 开普勒模式



牛顿模式：提出原理，深刻解释数据从而解释世界。

开普勒模式：直接对数据建立模型，从而解释世界。

数据

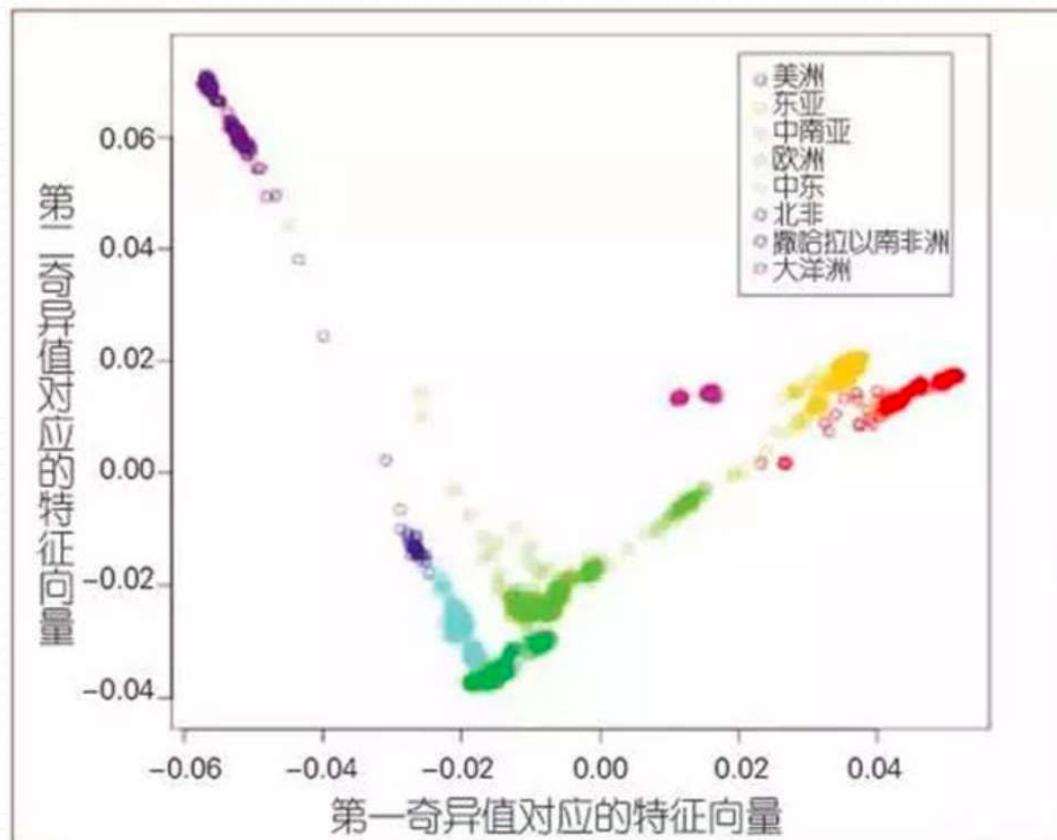
观察

世界

基因数据

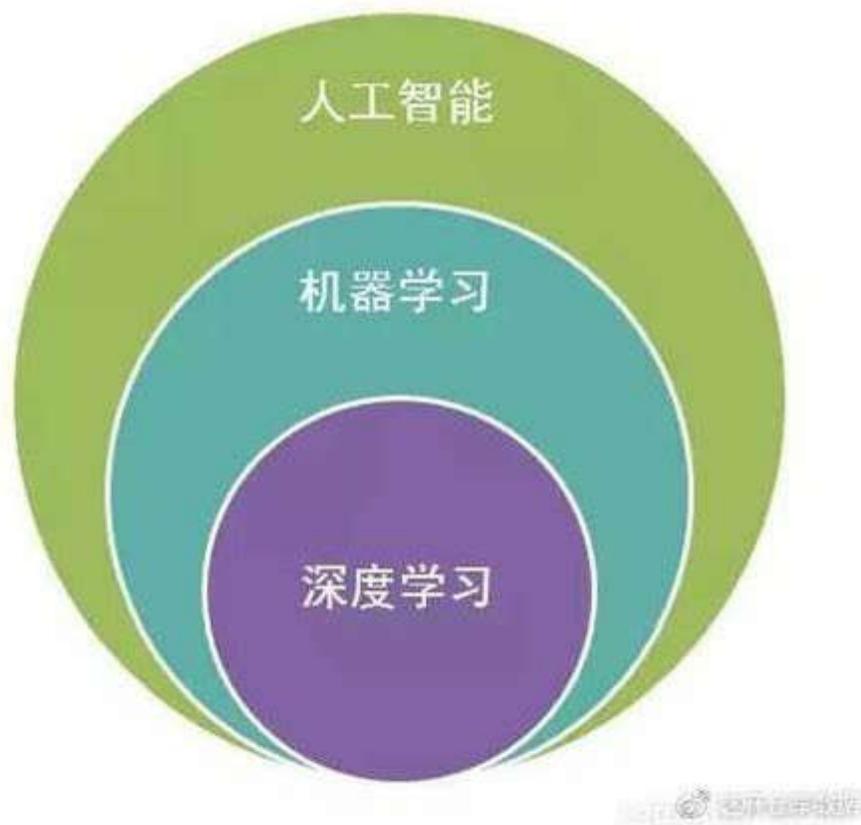
表2 SNP数据的示意

	SNP ₁	SNP ₂	...	SNP _m
志愿者1	0	1	...	0
志愿者2	0	2	...	1
志愿者3				
...
志愿者n	1	9	...	1



科学的方法研究数据

“人工智能就是研究如何使计算机去做过去只有人才能做的智能工作”

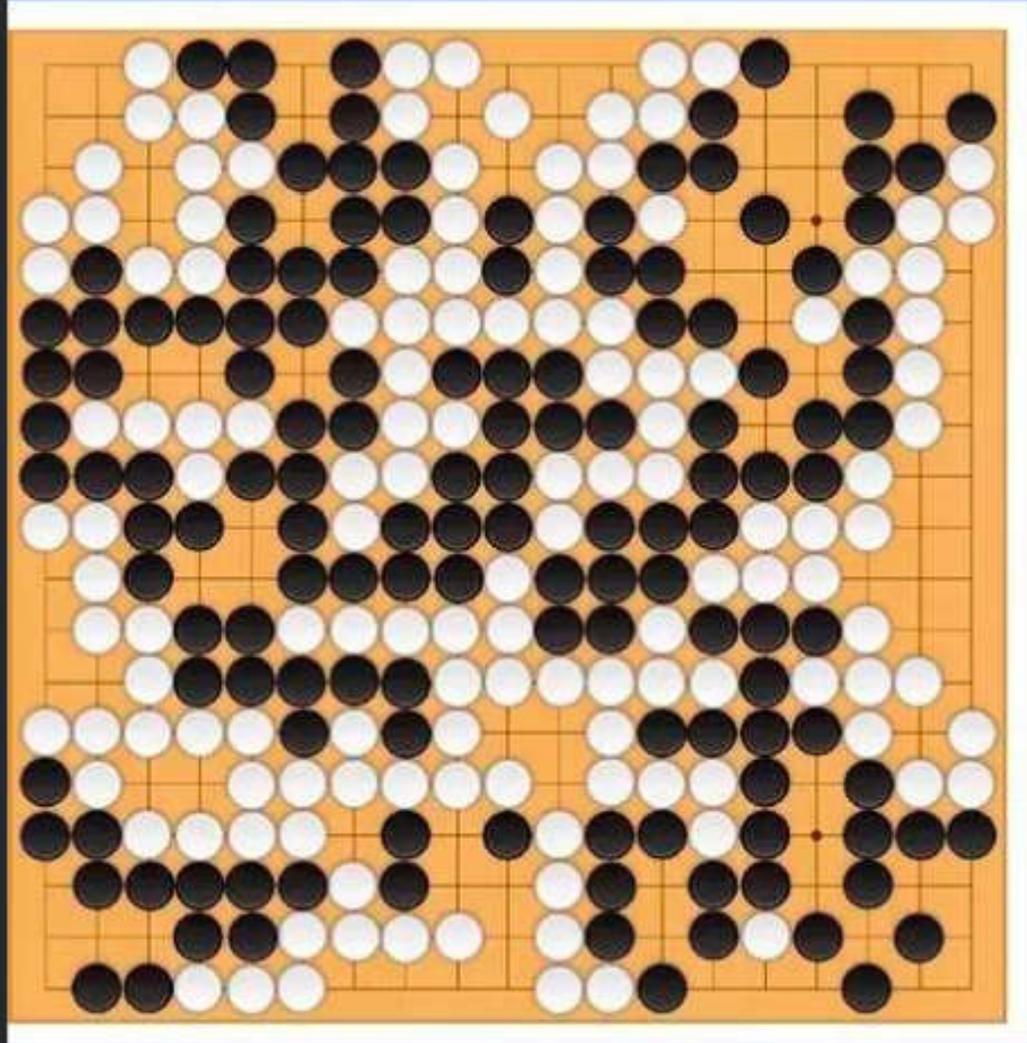


目前应用人工智能的主要行业



资料来源：灼识咨询

AlphaGo



THE ULTIMATE GO CHALLENGE
GAME 1 OF 3

23 MAY 2017

vs

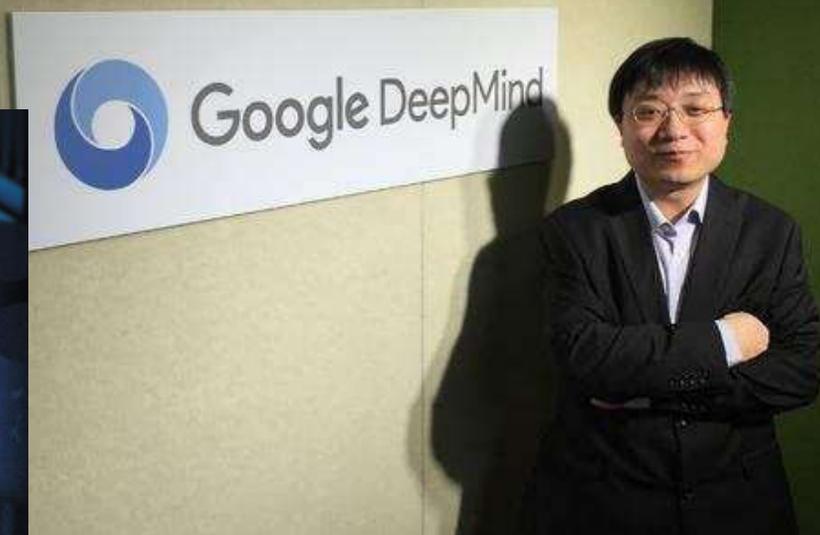
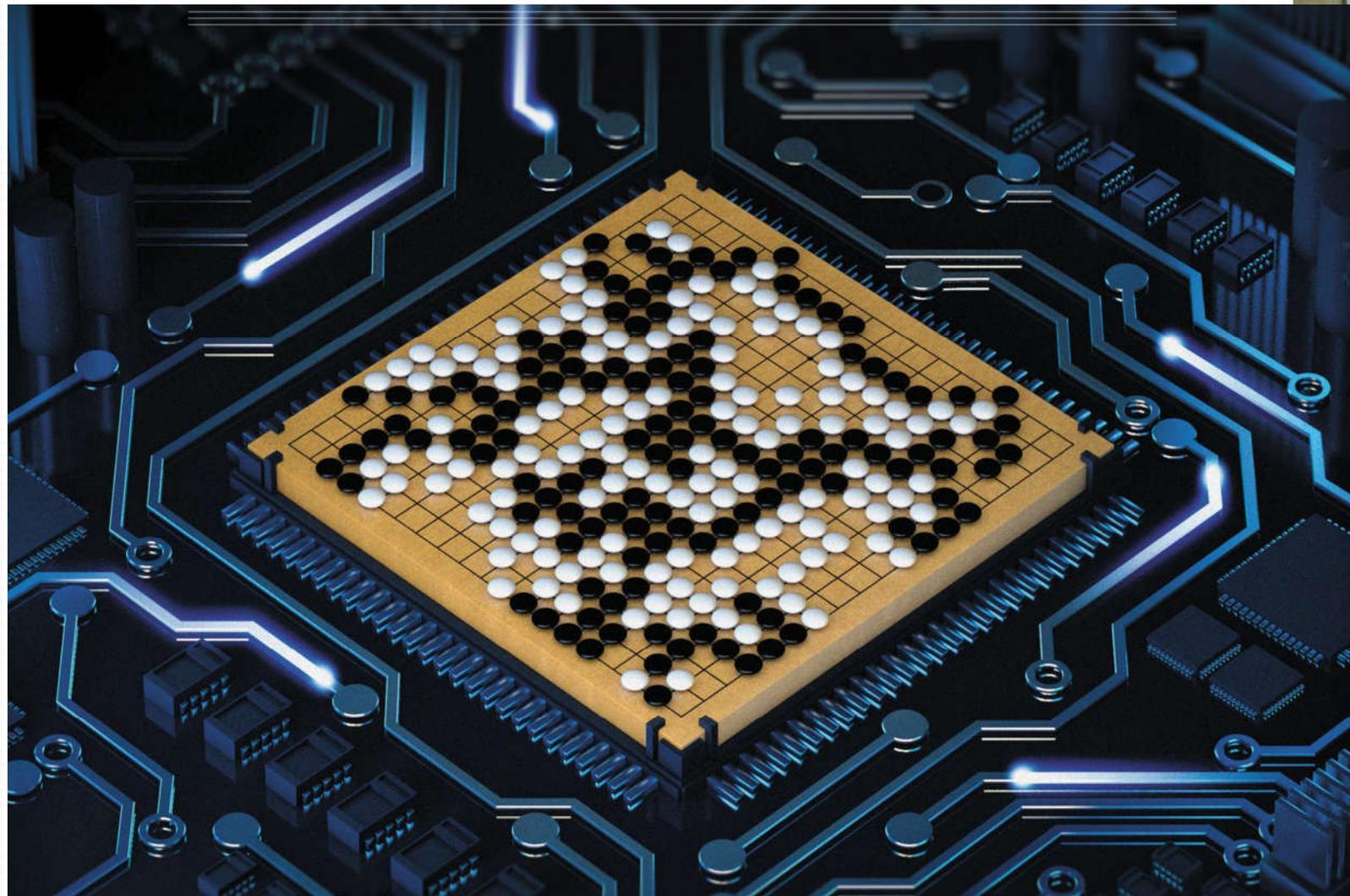
 **AlphaGo**
Winner of Match 1

 **Ke Jie**

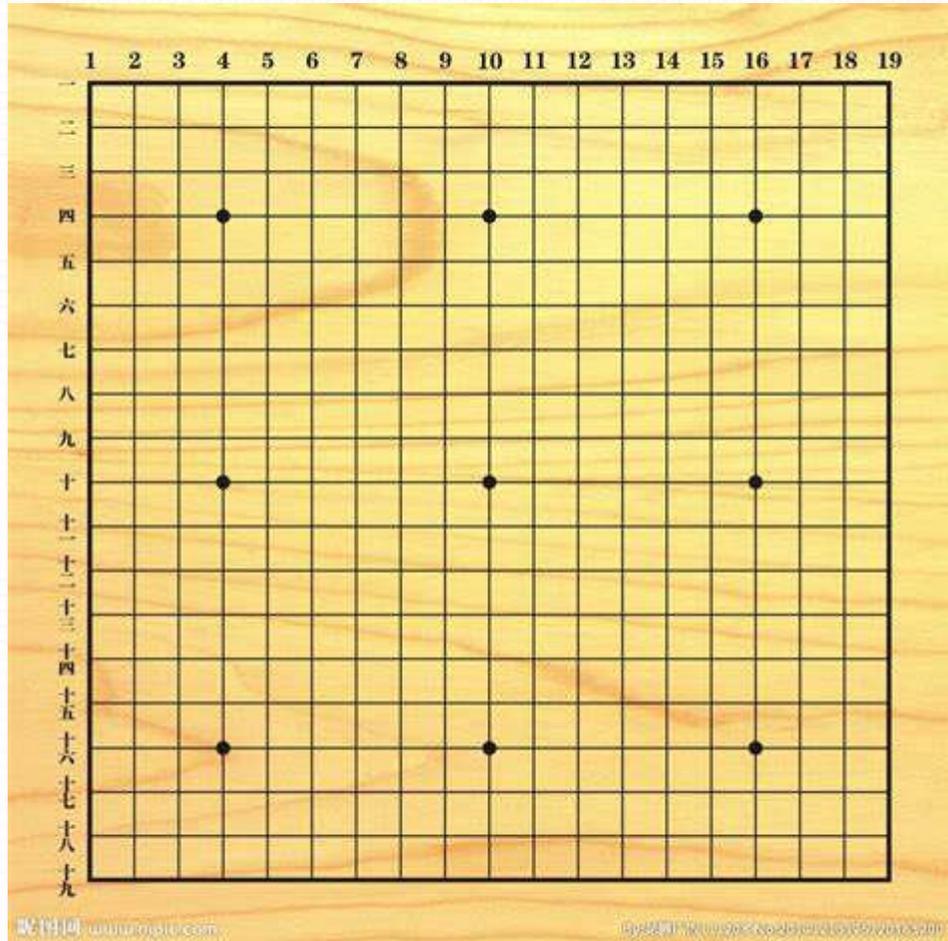
RESULT W+0.5

 量子位

AlphaGo如何下棋？



围棋棋盘



围棋可能下的方式：

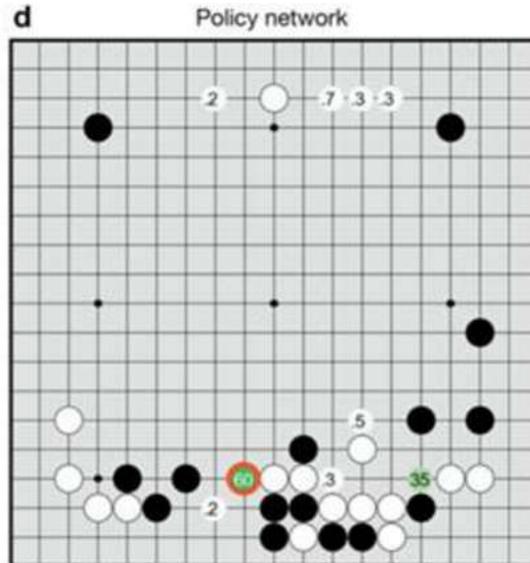
361 !

- 361阶乘到底有多大？大约1.43乘以10的768次方，即1后面有768个零！这个数字远远超出人类的想象，要知道，即使人类已知宇宙中的原子数量，也不过是10的80次方。
- 有一部科幻小说《诗云》，讲一个外星超级文明，将中国文字组成所有可能的7言古诗而不考虑该诗是否有意义，存储这些诗居然要用到整个太阳系的物质。以此思路，假如每个原子能存下一个围棋对局，那么整个宇宙的物质，只能存下围棋变化的一个极小零头！

线性代数的视角

• 围棋棋盘是19x19路，所以一共是361个交叉点，每个交叉点有三种状态，可以用1表示黑子，-1表示白子，0表示无子，考虑到每个位置还可能有落子的时间、这个位置的气等其他信息，**我们可以用一个 $361 * n$ 维的向量来表示一个棋盘的状态**。我们把一个棋盘状态向量记为s。

• 这样，设计一个围棋人工智能的程序，就转换成为了，任意给定一个s状态，寻找最好的应对策略a，让你的程序按照这个策略走，最后获得棋盘上最大的地盘。



蒙特卡罗方法

